IV. 圏論から見たリーマン面の変形

§1. 位相群の自己同型

命題:位相群 $\mathbb{R}$ の自己同型群は $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ によるものしかない。

証明 : $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が自己同型であるとする。$\alpha(1) = 1$ としてもよい。すると、「n 倍」を考えることによって、$\alpha(\lambda) = \lambda, \forall\lambda \in \mathbb{Q}$ が分かる。最後に、点列の極限を考えることによって、$\alpha = \mathrm{id}$ となることが従う。□

次に、$PSL_2(\mathbb{R})$ の自己同型群について考えよう。位相群 $\mathbb{R}$ より遥かに複雑な構造をしている。しかし、その中に様々な「$\mathbb{R}$ の像」=「一径数部分群」が入っている。例えば、前回見た回転群

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

がその代表的な例である。

簡単な演習問題だが、$PSL_2(\mathbb{R})$ の中心は自明である。これにより、$\gamma \in PSL_2(\mathbb{R})$ に対して定まる内部自己同型

$$PSL_2(\mathbb{R}) \ni g \mapsto \gamma \cdot g \cdot \gamma^{-1} \in PSL_2(\mathbb{R})$$

を考えることによって、単射な準同型

$$PSL_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(PSL_2(\mathbb{R}))$$

(ただし、「Aut(−)」は位相群の自己同型) ができる。一方で、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ で共役することによる $\iota \in \mathrm{Aut}(PSL_2(\mathbb{R}))$ もある。この自己同型 ι は、上半平面の $z \mapsto \overline{z}^{\,-1}$ という反正則自己同型 = 複素共役に対応している。ちょっと難しい定理だが、一径数部分群等を考えることによって次のようなことが証明できる。

定理:上の準同型 $PSL_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(PSL_2(\mathbb{R}))$ の像の指数は 2 であり、ι の像によって商 $\mathrm{Aut}(PSL_2(\mathbb{R}))/PSL_2(\mathbb{R})$ は生成される。

§2. 上半平面の自己同型群

上半平面 H の話に戻ろう。リーマン面 H の下部位相空間 を T と書く。

系 : 部分群 $\mathrm{Aut}(H) \subseteq \mathrm{Aut}(T)$ について :

(i) $\mathrm{Aut}(T)$ 内の $\mathrm{Aut}(H)$ の 中心化部分群Z は 自明 である。

(ii) $\mathrm{Aut}(T)$ 内の $\mathrm{Aut}(H)$ の 正規化部分群N は、$\mathrm{Aut}(H)$ と「$\iota : z \mapsto \overline{z}^{-1}$」で生成される。特に、$[N : \mathrm{Aut}(H)] = 2$。

証明 : (i) $\alpha \in Z$ とする。α は§1 の回転群と可換する。一方、この回転群の唯一の不動点は原点である。従って α は原点を固定する。次に $\mathrm{Aut}(H) \cong PSL_2(\mathbb{R})$ が H に 推移的 に作用することを思い出そう。α が $\mathrm{Aut}(H)$ のすべての元と可換するため、これで α が H のすべての点を固定することが分かる。

(ii) $\alpha \in N$ とする。容易に確認できるように、位相群 $\mathrm{Aut}(H) \cong PSL_2(\mathbb{R})$ の位相を、

H への作用から生ずるものと見ることができる。従って、α で共役することによって位相群Aut(H) の 自己同型 が定まる。§1 の定理より、生じうる Aut(H) の自己同型が、(ii) に書かれたものに限ることが分かる。また (i) より「共役」することによって失われる α がないことが分かる。□

圏論的な立場 からみると、この系の意義 は次の解釈にある : 系の (ii) により、H の 正則構造 を、どこかの 参考モデル $\mathbb{C}$ によって定義されるものではなく、下部位相空間 T の自己同相写像群 Aut(T) 内の「特別な部分群」

$$A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Aut}(H) \subseteq \mathrm{Aut}(T)$$

の特定によるものと見ることができる。そうすると自己同相写像 $T \xrightarrow{\sim} T$ が「(反) 正則」とは、「この部分群 A を保つ」という条件で定義すると、(系の (ii) により) これは普通の定義 と 一致する。つまり、参考モデル $\mathbb{C}$ から解放 されたことになる。

§3. リーマン面上の微分

リーマン面の本来の定義に戻ろう。リーマン面 X の、ある開集合たちの $\mathbb{C}$ への埋め込みを使うことによって、$\mathbb{C}$ 内の埋め込みの像の上の 微分

$$f(z)\, dz$$

（ただし $f(z)$ は正則関数）を考えることができる。このような微分たちが、「正則 な貼り合わせの同型たち」$z_2 = h_{21}(z_1)$ と両立的であるとき、即ち

$$\begin{aligned} f_2(z_2)dz_2 &= (dh_{21}(z_1)/dz_1) \cdot (f_2 \circ h_{21})(z_1)dz_1 \\ &= f_1(z_1)dz_1 \end{aligned}$$

を満たすとき、これらの「局所的な微分たち」を、リーマン面全体の上の微分 と見ることができる。このようなリーマン面全体の上の微分たちは、記号

$$\Gamma(X, \omega_X)$$

で表される $\mathbb{C}$ ベクトル空間を成す。

リーマン面 X が <u>コンパクト</u> であると仮定しよう。すると、<u>種数</u> g =「ドーナツ状の穴の数」という重要な <u>位相的不変量</u> がある。次の定理はリーマン面の理論の基本的な結果である。

<u>定理</u>：$\dim_{\mathbb{C}}(\Gamma(X, \omega_X)) = g$

古典的な立場に立つと、「微分」θ があると、それを当然 <u>積分</u> したくなる。この場合、曲面上の話なので、<u>基点</u> p を固定しておいてその点から別の任意の点 x への <u>道＝「パス」</u> γ に沿って積分することになる。

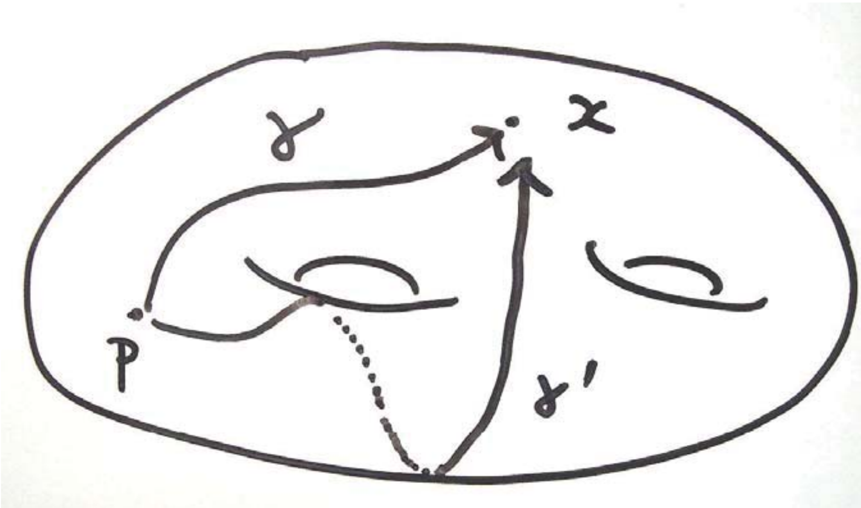
このように様々な x や θ に対して積分を

$$\int_\gamma \theta \in \mathbb{C}$$

計算すると、写像

$$X \to V \overset{\text{def}}{=} \Gamma(X, \omega_X)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\Gamma(X, \omega_X), \mathbb{C})$$

(ただし、「$*$」は双対ベクトル空間を表す) が得られそうだが、もう少し丁寧に考えると、そう単純な状況ではないことが分かる。

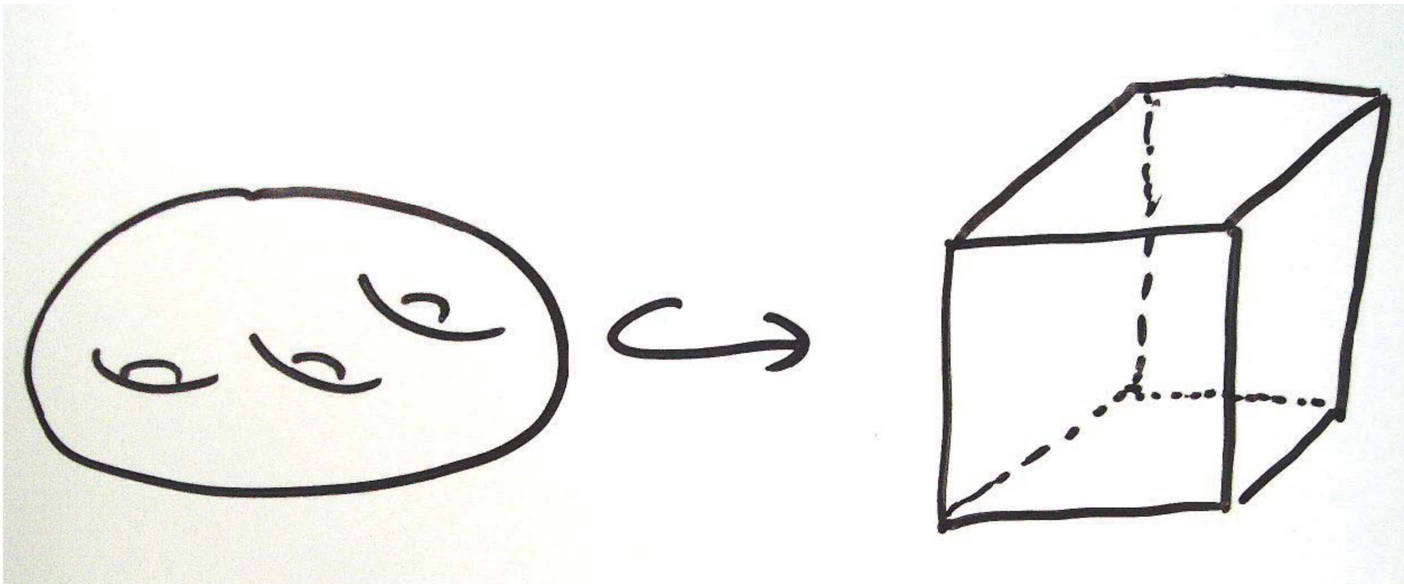


p と x が決まっていても γ には様々な可能性がある。特に、$x = p$ のとき（つまり、「閉じたパス」のとき）θ の積分は必ずしも 0 になるとは限らない。このような「閉じたパス」γ に沿って積分して得られる元 $\in V$ を <u>周期</u> と呼ぶ。

周期たちは、V 内の

$$\underline{\text{格子}} \quad \Lambda \subseteq V$$

$(\cong \mathbb{Z}^{2g}$ に同型なもの）を定義していて、即ち商 $J \stackrel{\text{def}}{=} V/\Lambda$ は 高次元の複素トーラス になる。次の結果＝「アーベルの定理」は、リーマン面の理論における重要な古典的結果である。



定理 : $g \geq 1$ のとき、積分することによって得られる射

$$X \to J = V/\Lambda$$

は 正則な埋め込み になる。

§4. リーマン面上の二次微分

§3 のような「一次微分」だけでなく、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対する「高次の微分」を考えることも可能である。つまり、リーマン面の各々の局所的な $\mathbb{C}$ への埋め込みを使うことによって、$\mathbb{C}$ 内の埋め込みの像の上の n 次微分

$$f(z)\ dz^n$$

(ただし $f(z)$ は正則関数) を考える。このような n 次微分たちが、「正則な貼り合わせの同型たち」$z_2 = h_{21}(z_1)$ に対して条件

$$\begin{aligned} f_2(z_2)dz_2^n &= (dh_{21}(z_1)/dz_1)^n \cdot (f_2 \circ h_{21})(z_1)dz_1^n \\ &= f_1(z_1)dz_1^n \end{aligned}$$

を満たすとき、これらの「局所的な n 次微分たち」を、リーマン面全体の上の n 次微分と見ることができる。このようなリーマン面全体の上の n 次微分たちは、記号

$$\Gamma(X, \omega_X^{\otimes n})$$

で表される $\mathbb{C}$ ベクトル空間を成す。

リーマン面 X が コンパクト でしかも 双曲的 であると仮定しよう。この双曲性の条件は、実は $g \geq 2$ という条件と同値であることは、一意化定理 より直ちに従う。(つまり、$g = 0$ だと、X は 球面 になり、$g = 1$ だと、X は 一次元複素トーラス になるため、普遍被覆は $\mathbb{C}$ と正則に同型になる。)

すると、いわゆる リーマン・ロッホ という、リーマン面の古典的な理論における基本的な定理より次の結果が従う。

定理：

(i) $n < 0$ のとき、$\dim_{\mathbb{C}}(\Gamma(X, \omega_X^{\otimes n})) = 0$

(ii) $n = 0$ のとき、$\dim_{\mathbb{C}}(\Gamma(X, \omega_X^{\otimes n})) = 1$

(iii) $n = 1$ のとき、$\dim_{\mathbb{C}}(\Gamma(X, \omega_X^{\otimes n})) = g$

(iv) $n \geq 2$ のとき、

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Gamma(X, \omega_X^{\otimes n})) = (2n - 1)(g - 1)$$

特に、$\dim_{\mathbb{C}}(\Gamma(X, \omega_X^{\otimes 2})) = 3(g - 1)$

n 次微分の中でも、「二次微分」は特に重要である。それは一言でいうと、二次微分は、

リーマン面のモジュライ

と密接に関係しているからである。ここでいう「リーマン面のモジュライ」とは、下部位相曲面を固定したとき、正則構造がどのくらい動き得るか、ということである。

例えば、$0 \neq \theta \in \Gamma(X, \omega_X^{\otimes 2})$ としよう。すると、θ が 零点を持たない、リーマン面 X の十分に小さい開集合 U の点 $p \in U$ を 基点に選ぶと、$x \in U$ に対して、p から x へのパス γ に沿って θ の 平方根 $\pm\sqrt{\theta}$ を積分する

$$\int_\gamma \pm\sqrt{\theta}$$

ことによって、U 上の 局所的な正則座標 ができる。このような座標を 変形 することによって X のモジュライを考察することが、古典的 Teichmüller 理論 の出発点である。

§5. リーマン面上の平行四辺形等

リーマン面 X の十分に小さい開集合 $U \subseteq X$ 上に二次微分の平方根の積分

$$z \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{\gamma} \pm\sqrt{\theta}$$

による座標 $z = x + iy$ について考える。まず、$\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して

$$z_{\lambda} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lambda \cdot x + iy$$

という別の座標を考えることができる。この新しい座標 z_{λ} によって、

新しい正則構造

が決まる。当たり前ではないが、このように局所的に作った新しい正則構造たちは旨く貼り合うため、X の下部位相曲面

T 全体

の上の新しい正則構造を定義している。

このようにしてできるリーマン面を X_λ と書くと、X と X_λ が同一の下部位相曲面を共有していることによって、（(反）正則＝等角ではないが）<u>擬等角</u> な同相写像

$$X \to X_\lambda$$

ができる。このようにして作った写像は

<u>Teichmüller 写像</u>

と呼ばれるもので、様々な特別な性質を持っている。なお、

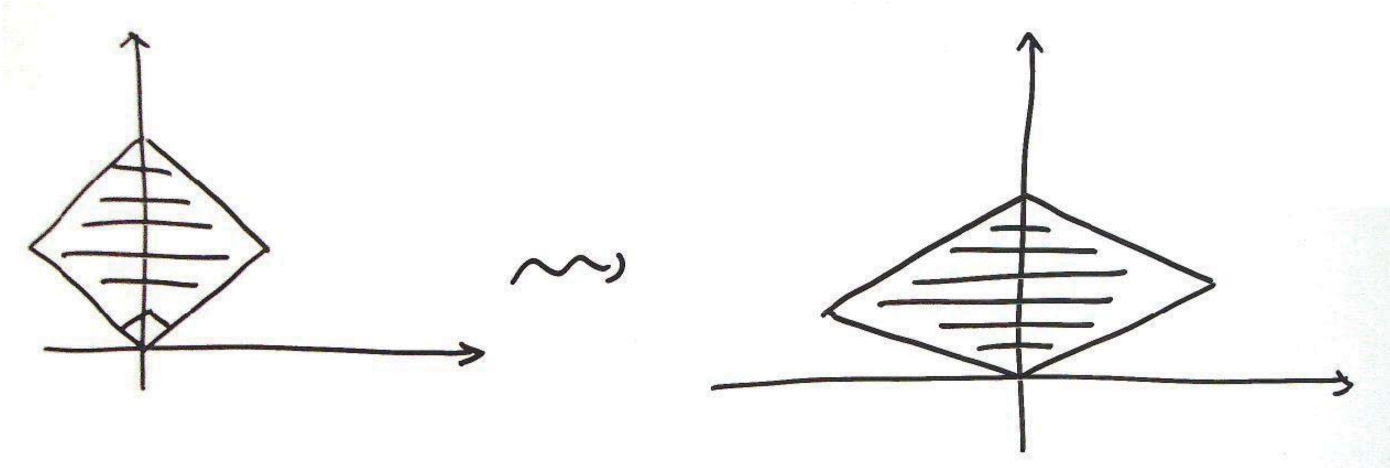
$\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ を動かす

ことによって、X の下部位相曲面 T 上に正則構造の <u>一径数族</u> ができる。

次に、上の話のような <u>座標たち</u> を使って

$$\mathcal{C} \in \{\mathrm{Squr}, \mathrm{Rect}, \mathrm{Para}\}$$

に対して、X 上の <u>四角</u>、<u>長方形</u>、あるいは <u>平行四辺形</u> からなる圏 $\mathcal{C}(X)$ を作ることができることに注目しよう。



<u>定理</u>：X と Y は双曲的リーマン面とする。

(i) $\mathcal{C} \in \{\mathrm{Squr}, \mathrm{Rect}\}$ のとき、

$$\left\{ \text{圏同値}\, \mathcal{C}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Y) \,\text{の同型類} \right\} \text{と}$$

$$\left\{ \text{（反）正則な同型}\ X \xrightarrow{\sim} Y \right\}$$

は 1 対 1 に対応している。

(ii) $\mathcal{C} = \mathrm{Para}$ のとき、

$$\left\{ \text{圏同値}\, \mathcal{C}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(Y) \,\text{の同型類} \right\} \text{と}$$

$$\left\{ \text{（反）Teichmüller 写像}\ X \xrightarrow{\sim} Y \right\}$$

は 1 対 1 に対応している。

証明はそれほど難しくないが下記の論文に譲る。

S. Mochizuki, Conformal and Quasiconformal Categorical ..., *Hiroshima Math. J.* **36** (2006), pp. 405-441.